1. Présentation

L'algèbre de Boole est un outil mathématique permettant la description, l'analyse et la conception de circuits logiques et numériques. Ces systèmes représentent l'évolution de la commande d'actionneurs de type logique (Tout Ou Rien) ou numériques, en fonction des divers ordres et consignes fournis par un utilisateur ou des capteurs industriels.

L'état des sorties de circuits logiques **COMBINATOIRES** ne dépend *que* de l'état des entrées et non pas des différents événements et états ayant pu apparaître auparavant.

2. Éléments de base

L'algèbre de Boole utilise, dans sa symbolisation, des constantes, des variables et des opérateurs.

2.1. Les constantes

... sont les différentes valeurs que peuvent prendre les variables. Il n'existe que deux niveaux logiques élémentaires: **niveau bas** et **niveau haut**, symbolisés respectivement par **0** et **1**.

2.2. Les variables logiques

... correspondent à une **entrée**, une **sortie** ou une variable intermédiaire dans un circuit numérique. Elles peuvent être symbolisées par des **lettres**: A, B, C, ... Chacune de ces variables est à tout moment égale à 0 ou bien égale à 1.

2.3. Les opérateurs logiques

...sont d'un nombre limité par le fait que chaque variable ne peut prendre que deux états:

- l'addition logique,
  Opérateur **OU**, symbolisé par « **+** »
- la multiplication logique,
  Opérateur **ET**, symbolisé par « **.** »
- la complémentation ou inversion logique,
  Opérateur **NON**, symbolisé par « $\overline{x}$ ».

3. Éléments de description des systèmes numériques

3.1. Tables de vérité

Une table de vérité nous fait connaître la **réaction de la valeur de sortie** d'un circuit logique par rapport **aux diverses combinaisons** de niveaux logiques **appliqués aux entrées**.

Dans chacune de ces tables, toutes les combinaisons possibles de 0 et 1 pour les entrées (ici A, B, C, ...) apparaissent à gauche, tandis que le niveau logique résultant de la sortie (ici s) est donné à droite. Dans les tables ci-dessous, s est donné par "0 / 1" puisque ses valeurs (0 ou 1) sont différentes pour chaque circuit étudié.

Table de vérité à 2 entrées

B	A	s
0	0	0/1
0	1	0/1
1	0	0/1
1	1	0/1

Table de vérité à 3 entrées

C	B	A	s
0	0	0	0/1
0	0	1	0/1
0	1	0	0/1
0	1	1	0/1
1	0	0	0/1
1	0	1	0/1
1	1	0	0/1
1	1	1	0/1

Un circuit à **n entrées logiques** peut recevoir **2^n états logiques distincts**. La table de vérité correspondante contiendra donc 2^n lignes, et pour chacune, l'état de la sortie sera défini.

3.2. Forme algébrique

La description de la réaction de la valeur de sortie d'un circuit logique peut se faire, en plus de la table de vérité, par une équation booléenne.

Exemple 1 :

Soit un circuit logique à 3 entrées A, B, C et une sortie x, passant à 1 quand A et B sont à 1 ou bien quand C est à 1 : la forme algébrique est :

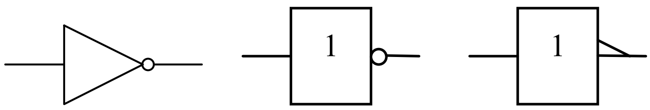
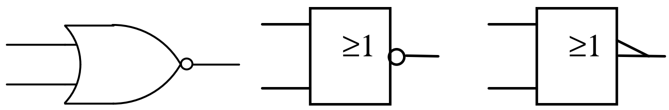
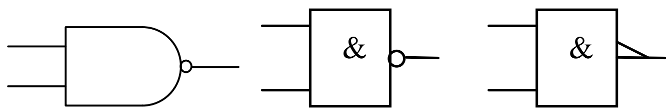
$$x = (A\, et\, B)\, ou\, C = A.B + C$$

Exemple 2 :

Soit un circuit logique à 3 entrées A, B, C et une sortie x, passant à 1 quand A et B sont à 1 ou bien quand (A= 1, B = 0 et C = 1) :

$$x = A.B + A.\overline{B}.C$$

3.3. Les opérateurs

L'opérateur OU à n entrées ($n \geq 2$) donne un 1 si au moins l'une de ses entrées est à 1		$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=1$
L'opérateur ET à n entrées ($n \geq 2$) donne un 1 si toutes ses entrées sont à 1		$0.0=0$ $0.1=0$ $1.0=0$ $1.1=1$
L'opérateur NON (à 1 entrée) donne le complément de son entrée		$\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$
L'opérateur NOR (NI) donne le complément d'une fonction OU: (Non-OU) $x = A \downarrow B = \overline{A+B}$		$\overline{0+0}=1$ $\overline{0+1}=0$ $\overline{1+0}=0$ $\overline{1+1}=0$
L'opérateur NAND donne le complément d'une fonction ET: (Non-ET) $x = A \vert B = \overline{A.B}$		$\overline{0.0}=1$ $\overline{0.1}=1$ $\overline{1.0}=1$ $\overline{1.1}=0$

4. Analyse des systèmes numériques

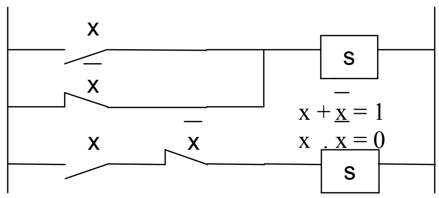
L'algèbre de Boole sert, après l'avoir décrit, à analyser un circuit logique exprimé sous forme mathématique. L'objectif est d'obtenir des expressions simplifiées afin d'en faciliter la conception.

Un ensemble de théorèmes résumant les propriétés de l'algèbre de Boole peut être énoncé. La démonstration de ces équations est évidente en reprenant les propriétés des opérateurs logiques.

4.1. Théorèmes de Boole à 1 variable

$$x+0=x \quad x+1=1 \quad x+x=x \quad x+\overline{x}=1$$

$$x.0=0 \quad x.1=x \quad x.x=x \quad x.\overline{x}=0$$



4.2. Théorèmes de Boole à plusieurs variables

$$x+y = y+x$$

$$x.y = y.x$$

$$x+(y+z) = (x+y)+z = x+y+z$$

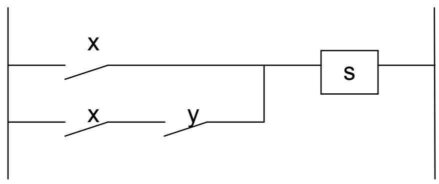
$$x.(y.z) = (x.y).z = x.y.z$$

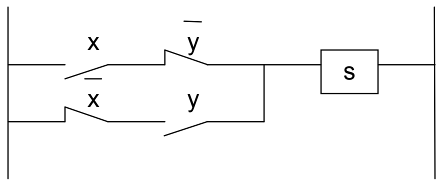
$$x.(y+z) = x.y+x.z$$

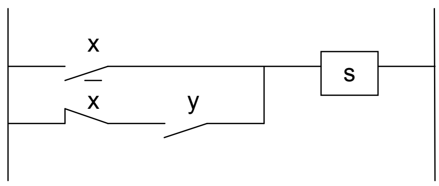
$$(w+x).(y+z) = w.y+x.y+w.z+x.z$$

$$x+xy=x \qquad x+\overline{x}y=x+y$$

$$x\overline{y}+\overline{x}y \neq 1 \qquad \overline{x}.\overline{y}+x.\overline{y}+\overline{x}.y+xy=1$$







4.3. Théorèmes de De Morgan

Le complément d'une expression logique peut être écrite par le complément de chaque variable et opérateur de l'expression.

<u>Attention</u> cependant à conserver la <u>priorité des opérateurs</u> des expressions d'origine !

$$\overline{(x+y)}=\overline{x}.\overline{y} \qquad \overline{(x.y)}=\overline{x}+\overline{y}$$

$$Ex.: \overline{A.B+C.(D+E)}=$$

4.4. Universalité des opérateurs Non-ET et Non-OU

Toutes les expressions booléennes se résument à différentes combinaisons élémentaires de OU, ET et NON. Or, il est possible de reconstituer chacune de ces 3 opérations avec exclusivement des portes Non-ET, ou exclusivement des portes Non-OU.

On en déduit que toute équation peut être écrite exclusivement à partir d'opérateurs Non-ET, ou exclusivement à partir d'opérateurs Non-OU.

$$\overline{A}=\overline{A.A}=A|A=A|$$

$$\overline{A}=\overline{A+A}=A\downarrow A=A\downarrow$$

$$A.B=\overline{\overline{A.B}}=\overline{A|B}=(A|B)|$$

$$A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{A\downarrow B}=(A\downarrow B)\downarrow$$

$$A+B=\overline{\overline{A}.\overline{B}}=(A|)|(B|)$$

$$A.B=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=(A\downarrow)\downarrow(B\downarrow)$$