

1. Présentation

La description des systèmes logiques et numériques par l'algèbre de Boole a pour objectif la conception et la réalisation matérielle de ces systèmes. Afin d'en réduire la difficulté et le coût, on est amené à simplifier au maximum les équations booléennes. Deux techniques peuvent être utilisées :

- les **théorèmes de Boole** : technique algébrique dépendant de l'expérience et de "l'instinct",
- les **tableaux de Karnaugh** : technique graphique suivant une démarche systématique.

Ces méthodes exigent que l'on exprime les équations logiques sous la forme d'une **somme de produits**.

Exemples :

$$x = A.B.C + \bar{A}.B.\bar{C}$$

$$y = A.B + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{C}.\bar{D} + D$$

$$z = \bar{A}.B + C.\bar{D} + E.F + G.K + H.\bar{L}$$

Note : Dans une somme de produits, le signe de complémentation ne peut pas surmonter plus d'une variable d'un terme. Exemples :

$$w = A.B.C + \bar{Y}.Z \quad \text{ne sont pas des sommes de produits;}$$

$$w = A.(B + \bar{C}) + \bar{Y} + \bar{Z}$$

$$w = A.\bar{B} + A.\bar{C} + \bar{Y} + \bar{Z} \quad \text{est une somme de produits.}$$

2. La simplification algébrique

Les théorèmes de l'algèbre booléenne (cf. cours L'algèbre de Boole) sont les outils de la simplification des expressions d'un circuit logique. Malheureusement, il n'est pas toujours facile de savoir quels théorèmes il faut invoquer pour obtenir le résultat minimal. D'ailleurs, rien ne nous dit que l'expression simplifiée est la forme minimale et qu'il n'y a pas d'autres simplifications possibles. Pour toutes ces raisons, la simplification algébrique est un processus "d'approximations successives" pouvant toutefois, l'expérience aidant, amener à de bons résultats.

On trouve dans cette technique toujours deux étapes essentielles :

- la transformation de l'expression pour obtenir une somme de produits,
- l'analyse de chaque produit pour trouver les variables communes, puis la mise en facteur de ces dernières, quand elle permet d'éliminer un ou plusieurs termes.

3. Les tableaux de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh est un **outil graphique** qui permet de simplifier de manière méthodique une équation logique ou le processus de passage d'une table de vérité à son circuit correspondant. Bien que les tableaux de Karnaugh soient applicables à des problèmes ayant un nombre quelconque de variables d'entrée, ils ne sont plus d'une grande utilité en pratique quand le nombre de variables dépasse 6 ou 7. Dans ce cas, il est préférable de traiter le problème avec un programme informatique.

Chaque tableau de Karnaugh est associé à une seule variable de sortie de la table de vérité.

3.1. La description des tableaux de Karnaugh

Les cases d'un tableau de Karnaugh sont désignées (par les variables A, B, ... , les constantes 0, 1, ou les barres) de manière que *deux cases adjacentes n'aient qu'une seule variable dont l'état soit différent*. Le codage est effectué en **BINAIRE REFLECHI**.

	$\bar{B}\bar{A}$	$\bar{B}A$	$B\bar{A}$	BA
$\bar{D}\bar{C}$				
$\bar{D}C$				
$D\bar{C}$				
DC				

	$\bar{B}\bar{A}$	$\bar{B}A$	$B\bar{A}$	BA
$\bar{D}\bar{C}$				
$\bar{D}C$				
$D\bar{C}$				
DC				

Notez qu'une case de la colonne extrême gauche du tableau est adjacente à la case de la colonne extrême droite de la même ligne. On considère donc le tableau *circulaire* dans le sens des colonnes comme des lignes.

Figure 1: tracé rapide d'un tableau de Karnaugh

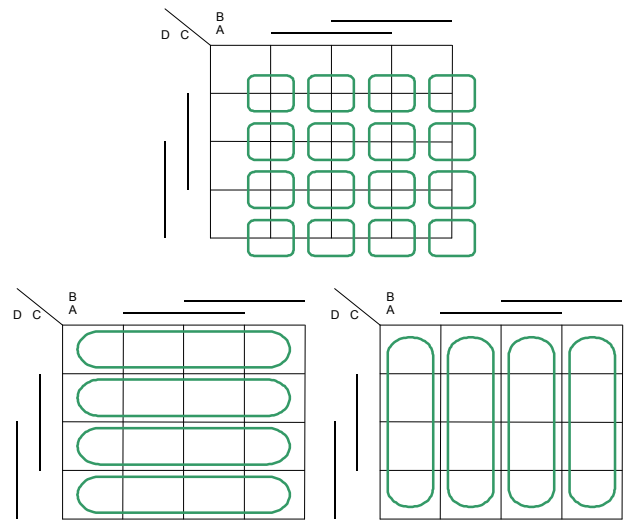
	$\bar{B}\bar{A}$	$\bar{B}A$	$B\bar{A}$	BA
$\bar{D}\bar{C}$				
$\bar{D}C$				
$D\bar{C}$				
DC				

Sur 1 variable: présence de la barre = « 1 »,
absence de la barre = « 0 ».

3.2. Placement des combinaisons de la table de vérité dans le tableau

	B				
DC	A				

Groupements de 4 cases autorisés (24)



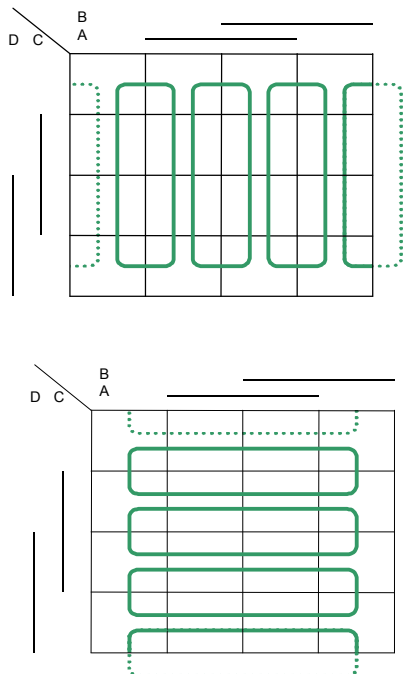
3.3. Regroupement dans les tableaux de Karnaugh

Méthode:

Pour vérifier qu'un groupement est autorisé, on prolonge son axe de symétrie à travers les variables. Il faut alors que chaque variable soit symétrique (opposée ou identique) de part et d'autre de l'axe du groupement sur toute la largeur du groupe (et non sur la largeur du tableau).

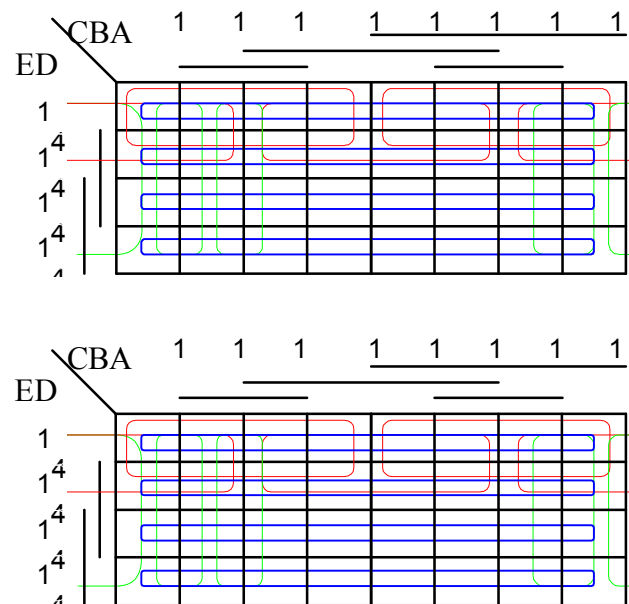
3.3.1. Table à 4 variables

Groupements de 8 cases autorisés (8)



3.3.2. Table à 5 variables

Groupements de 8 cases autorisés (36)



Groupements de 8 cases interdits (16)

